

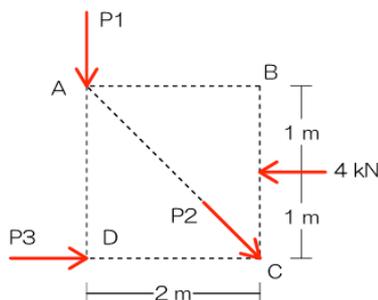
【本日の目標 3】

- (1) 力の釣り合い ← 力の釣り合いより「未知力の算定」ができる（復習）
- (2) 梁・ラーメンの応力 ← 「応力」を求めることができる（復習）
 - ・平成 10、14、19、20 年：任意の点における曲げモーメントを求めよ
 - ・平成 10 年：曲げモーメント図より軸方向力を求めよ
 - ・平成 11、12、13、17 年：任意の点に曲げモーメントが生じないための荷重の比を求めよ（片持ちばり）
 - ・平成 15 年：各部材の軸方向力を求めよ
 - ・平成 14、21、22 年：任意の点における曲げモーメントを求めよ（3 ヒンジラーメン）
 - ・平成 18 年：せん断力が 0 となる位置を求めよ（3 ヒンジラーメン）
- (3) ラーメンの応力図 ← 正しい「曲げモーメント図」を見分けることができる
 - ・平成 15、17、22 年：正しい曲げモーメント図はどれか
- (4) トラス ← トラス部材の「応力」を求めることができる
 - ・平成 10、11、12、13、14、17、18、19、20、23、24 年：トラス部材の応力を求めよ
 - ・平成 16、21 年：トラス部材の変形（ひずみ）を求めよ
 - ・平成 22：トラスの応力度
- (5) 合成ラーメン ← 合成ラーメンにおける任意の部材の「応力」を求めることができる
 - ・平成 10、15、23、24 年：部材に生じる応力・張力を求めよ
 - ・平成 20 年：部材に生じる応力を求めよ（未だ解けません…）
- (6) たわみの公式 ← 「たわみの公式」を暗記し、簡単なたわみの問題を解くことができる
 - ・平成 11、23 年：最大たわみが等しい場合の荷重の比を求めよ（公式直接代入型）
 - ・平成 17、21 年：部材のたわみの比を求めよ（公式直接代入型）
 - ・平成 13、14、18 年：部材先端の変位（たわみ）を求めよ（たわみと傾き合成型）
 - ・平成 22 年：部材先端部分のたわみ角を求めよ（公式変形型）
 - ・平成 16 年：たわみ・たわみ角が等しくなる場合の荷重条件を求めよ（公式直接代入型改）

『復習』

力の釣り合い

復習 1 力がつりあい状態にある場合の $P_1 \cdot P_2 \cdot P_3$ の値を求めよ



P_1 を求める

$$M_C = -4 \times 1 - P_1 \times 2 = 0$$

$$P_1 = -2[kN]$$

P_3 を求める

$$M_A = +4 \times 1 - P_3 \times 2 = 0$$

$$P_3 = 2[kN]$$

【解法】

- 1) 求めたい未知力を決定 (P_1 とする)
- 2) それ以外の未知力の交点をチェック
- 3) 上記 2) の点におけるモーメントの合計を求める
- 4) P_3 も同じ過程（モーメント）で求める
- 5) P_2 は…分力して縦の合計 0 or 横の合計 0 を使います

P_2 を求める

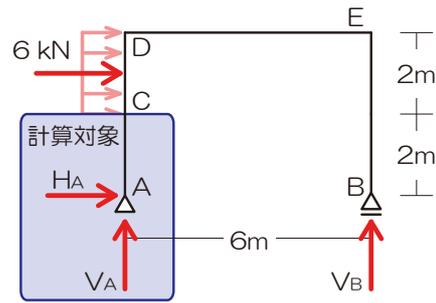
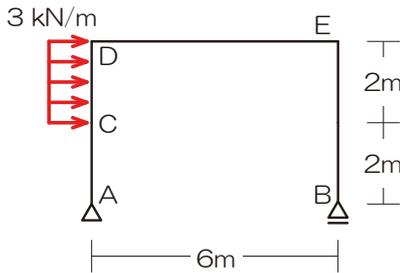
$$\sum Y = 2 - P_{2y} = 0$$

$$P_{2y} = 2$$

$$P_2 = 2\sqrt{2}[kN]$$

ラーメンの応力

復習2 以下のラーメンのC点における曲げモーメントを求めよ



【解法】

- 1) 反力を図示
- 2) 応力を求めたい箇所で切断!
- 3) 計算対象側を決定
- 4) 対象となる力をチェック
- 5) 対象となるそれぞれの力による任意の点の応力を合算

計算対象側にある力は V_A と H_A

C点に曲げモーメントの影響を与えるのは H_A のみ

(V_A の作用線はC点を通るのでモーメント0)

H_A を求める

$$\sum X = 6 + H_A = 0$$

$$H_A = -6$$

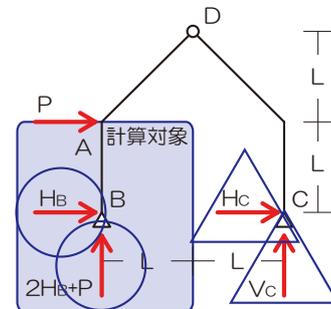
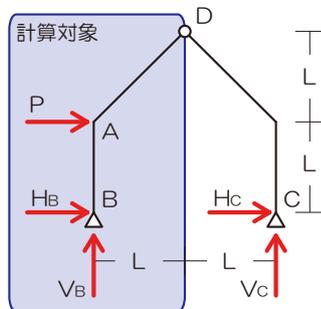
A点の曲げモーメントは

$$M_A = +6 \times 2$$

$$M_A = 12 [kNm]$$

3 ヒンジラーメンの応力

復習3 C点の曲げモーメントを求めよ



【解法】

- 1) 反力を図示
- 2) 応力を求めたい箇所で切断!
- 3) 計算対象側を決定
- 4) 対象となる力をチェック
- 5) 対象となるそれぞれの力による任意の点の応力を合算

A点の曲げモーメントを求める (切断⇒計算対象は左)

対象となる力は H_B と $2H_B + P$

H_B と $2H_B + P$ を求める

$$M_C = (2H_B + P) \times 2L + P \times L = 0$$

$$4H_B L + 2PL + PL = 0$$

$$H_B = \frac{3P}{4}$$

A点の曲げモーメントは

$$M_A = -\frac{3P}{4} \times L \quad (\text{絶対値表記})$$

$$M_A = \frac{3PL}{4}$$

D点はヒンジ点なので

$$M_D = +V_B \times L - H_B \times 2L - P \times L = 0$$

$$V_B L = 2H_B L + PL$$

$$V_B = H_B + P$$

(E) ラーメンの応力図

➤ 応力図

- 構造体の各所に生じる応力を図示した物 ⇒ 軸方向力図：N 図、せん断力図：Q 図、曲げモーメント図：M 図
- M 図：引張り側へ図示（力により構造体が曲げられる方向に図示）

『クルクルドンの解法』

クルクルドンは「曲げモーメント図」の書き方です（M 図は「引張り側（応力度的）に書くこと」って決まっています）
 「クルクルドン」をしなければならない点→**支点・節点・荷重の加わっている点**→これらの点をつなげると M 図完成

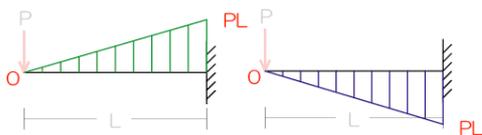
以下の片持ち梁で説明してみます



A 点と B 点の曲げモーメントは以下です



問題となるのは、M 図を上を書くか？下を書くか？



そこで【クルクルドン】の登場

- 1) 荷重 P により、B 点に曲げモーメントが発生、そこで B 点に注目し、上？下？を検討する

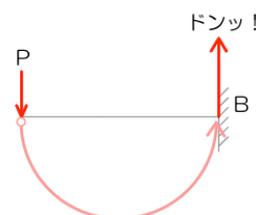
- 2) 荷重 P の作用点をスタート



- 3) ゴールを曲げモーメントを求める点（今回は B 点）とし、「クルクル♪」



- 4) 上記クルクルによって、応力を求めたい点（B 点）がすっ飛ばされる方に「ドンッ！」



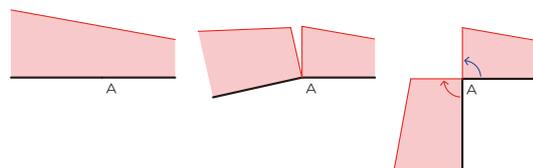
- 5) 「ドンッ！」って飛ばされた方に応力の分布図を示す



上記法則は単純梁、片持ち梁に限らずラーメン等の全ての構造物で成り立ちます

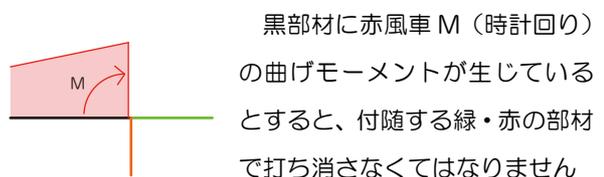
節点の曲げモーメント図

『曲げモーメントはたとえ部材の角度が変わっても連続性が維持される』ってルールがあります

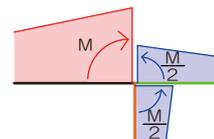


母材から M 図がどちら回転に立ち上がっているの？
 【小さな風車】に注目すると、打ち消し合って 0 になります（赤風車は時計回り、青風車は反時計回りで合計 0）

さて、複数の部材が構成される節点では？こちらも【小さな風車】の法則は成立します

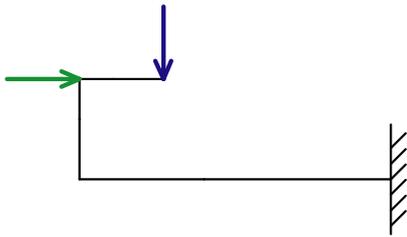


赤・緑部材ともに剛性が等しい場合には仲良く半分ずつ受け持ちます（右図）赤風車を青風車 2 つで打ち消し曲げモーメント 0



この法則を覚えておくと、不静定の M 図の問題の最強のカードとなります

『例題』以下の変則ラーメンのM図を書いてみましょう
(荷重の大きさ、各部材長等は考えなくても良いです…)



註1：片持ち系の構造物は自由端から書き始めると早いです

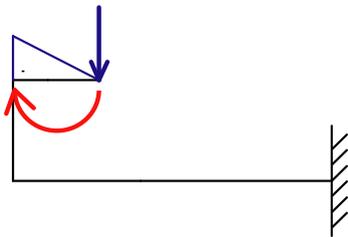
註2：クルクルドンが必要な点（応力を求める必要のある点）

は「支点」「節点」「荷重の掛かっている点」です

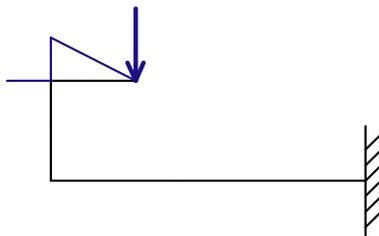
註3：上記各点の応力が求められたら後は結ぶだけ

註4：剛節点では【小さな風車】をチェック

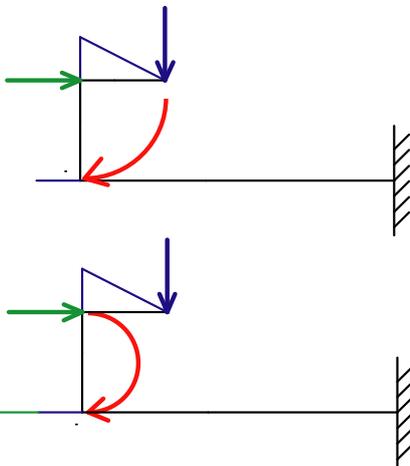
1) クルクルドン



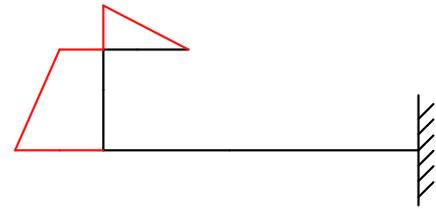
2) 風車が打ち消しあうように



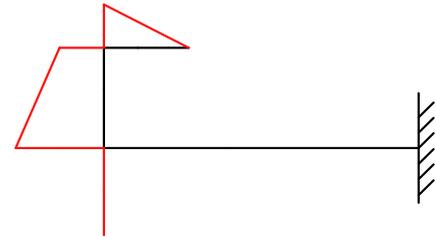
3) またまたクルクルドン、ですが荷重が2つあるので両者ともに別々に「ドンッ！ドンッ！」



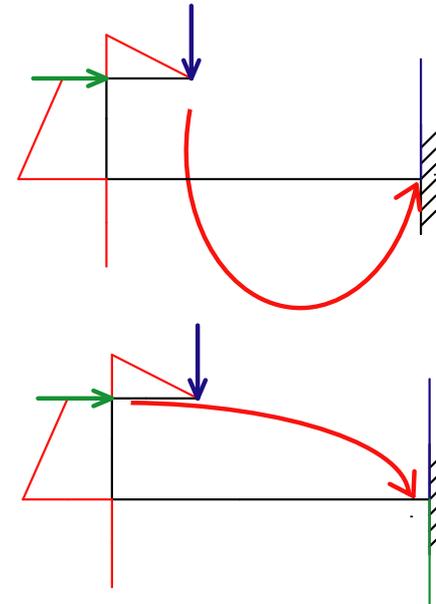
4) 2つの「ドンッ！」を合算（部材の両端の応力が分かっただけから結んでおく）



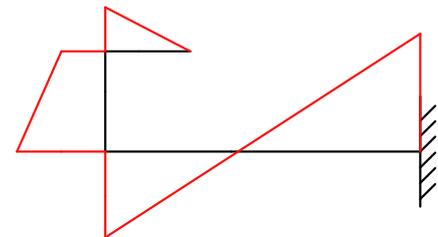
5) 風車チェック



6) さらにクルクルドン+クルクルドン（向きが逆ですね）



7) 合算して各点を結ぶ



以上です

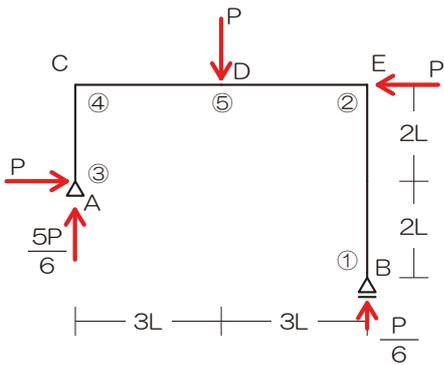
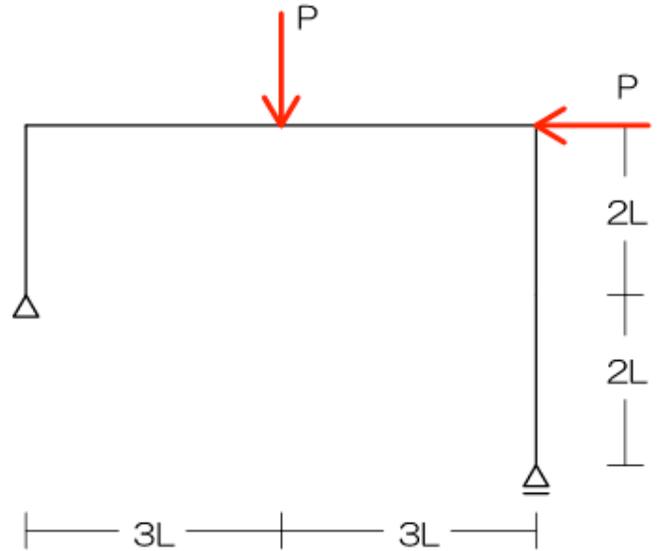
ラーメンの応力図

例題 10 　ただし曲げモーメントを選択せよ（H7【過去問 37】、9【過去問 38】、15【過去問 39】、17《過去問 10》、22（不静定））

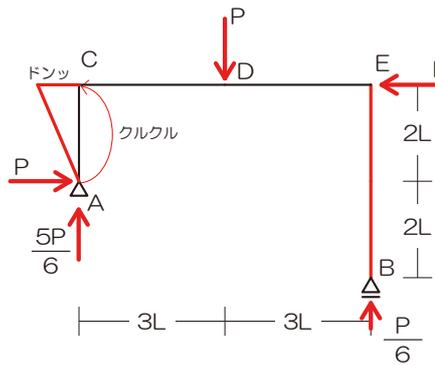
《過去問 10》 図のような荷重 P を受けるラーメンの曲げモーメント図として、正しいものは次のうちどれか。ただし、曲げモーメント図は、材の引張側に書くものとする。（H17）

【解法】

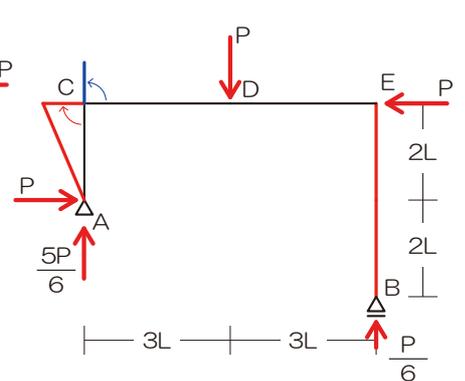
- 1) 曲げモーメント図は「クルクルドン」
- 2) 応力を求める必要のある点をチェック
- 3) ラーメンの場合は両柱から図示
- 4) 柱・梁の接合部は「内々外々」



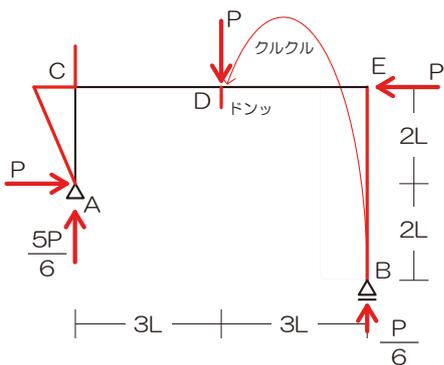
要クルクルドンの点は上記5つ



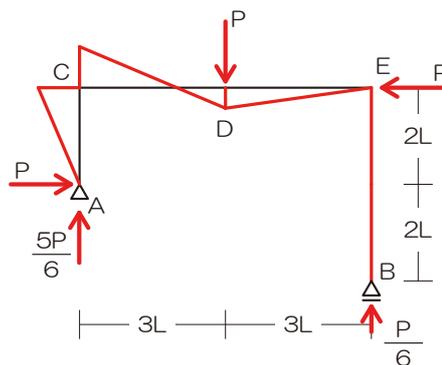
まずは両柱からクルクルドンッ



小さな風車



梁の荷重点もクルクルドンッ



つないで完成！

『難解問題』

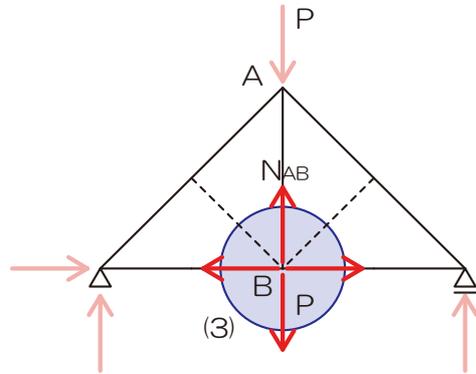
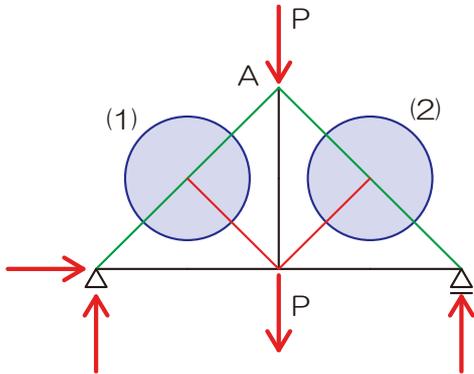
※ H22 は不静定です…これはちょっと厄介

1.2.4 静定トラス：P33

➤ 静定トラス

- 軸方向力のみ生じる（ピン節点による構造体のため、曲げモーメントを伝達出来ないから）
- 解法には「節点法」と「切断法」がある
- 軸方向力の符号に注意！ ← 圧縮がマイナス(-)、引張がプラス(+)

➤ 節点法



【解法】

- 1) 反力を図示
- 2) 直線+1 をチェック
- 3) 任意の支点・節点（部材が少ない所）をチェック
- 4) 上記の点における部材に生じる可能性のある応力を図示*1
※1：必ず支点・節点からベクトルを表記
- 5) 上記点における力の釣り合い*2より部材の応力を算定
※2：縦の合計0、横の合計0しか使えませんよー

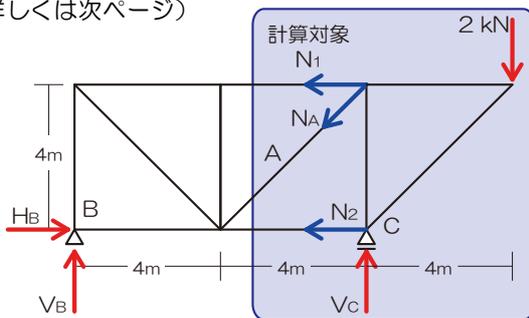
直線+1にて0メンバーを確認
⇒上左図の赤部材が0メンバー

B 節点に注目

$$\sum Y = N_{AB} - P = 0$$

$$N_{AB} = P$$

➤ 切断法（詳しくは次ページ）



【解法】

- 1) 反力を図示
- 2) 切断面*3を決定→計算対象を決定
※3：部材3本が最速ですが、2本でも大丈夫ですよ…
- 3) 切断された部材に生じる応力を仮定（図示*4）
※4：「必ず」計算対象側の支点・節点からベクトルを表記
- 4) 力の釣り合いより部材の応力を算定*5
※5：任意の点のモーメントが0、縦の合計0、横の合計0

切断 ⇒ 計算対象は右

反力 V_C を求める（反力算定は元の図、赤ベクトルのみに戻りますよ！）

$$M_B = +2 \times 12 - V_C \times 8 = 0$$

$$V_C = 3[kN]$$

N_A を求める

$$\sum Y = -2 + 3 - N_{Ay} = 0$$

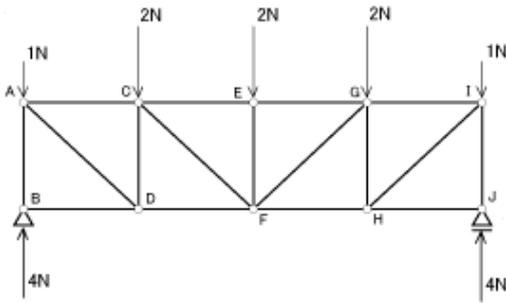
$$N_{Ay} = 1$$

$$N_A = \sqrt{2}[kN]$$

『切断法で部材に生ずる力を求める』 ⇒ わかっている人は読む必要なし！

≪解法の手順≫ 以下の各部材の応力を切断法にて求めよ

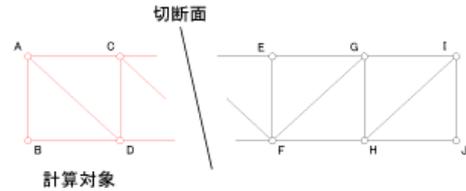
1) 反力を図示 (片持ちトラスの場合は求める必要が無い場合もあり)



←線対称だから暗算でOK

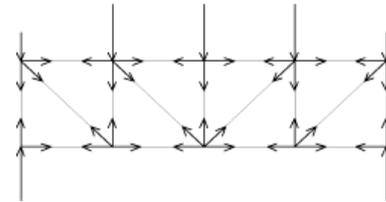
2) 切断面を決定→計算対象を決定

- ・ 切断断面：部材 3 本を切断する面とすること
- ・ 計算対象：力の少ない方が良 (今回は左側計算対象)

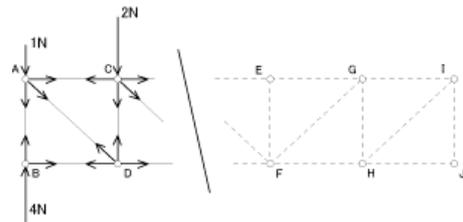


3) 部材内の応力 (軸方向力) を仮定

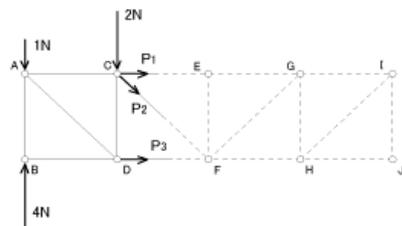
- ・ 通常は以下の図のように各部材内に応力が生じています



- ・ 今回は左側のみを対象としたので・・・

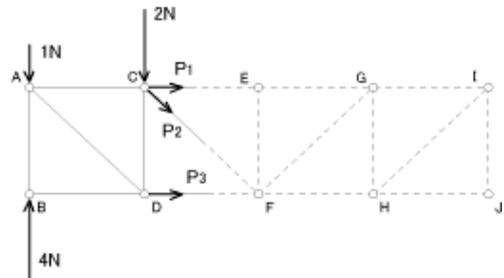


- ・ また同軸中の応力は互いに打ち消しあうので、結局は切断された部材のみに生じる可能性のある応力を図示します
- ・ (「節点から」ベクトルを図示する事!!!)



4) 力の釣合より未知の応力を算定

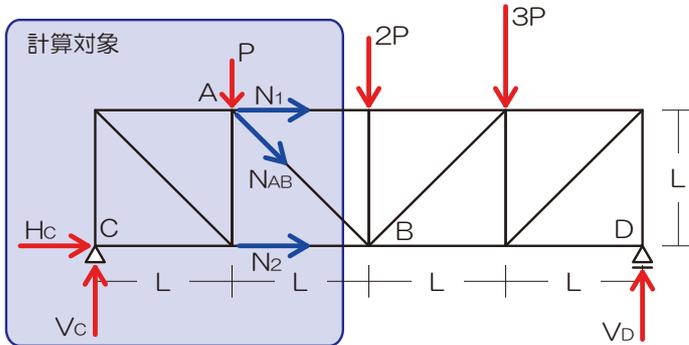
- ・ 力の釣合式： $\sum X = 0$ 、 $\sum Y = 0$ 、 $\sum M_x = 0$ を使用
- ・ 最も多く使われるのは $\sum M_x = 0$
- ・ ↑ 任意の点の決定は上記未知の応力 2 本が交わる点 (選択されていいない方の部材上の点でも OK) とする



トラスの応力

例題 11 任意の部材における応力を求めよ。(H5【過去問 40】、6【過去問 41】、7【過去問 42】、8【過去問 43】、9【過去問 44】、10【過去問 45】、11【過去問 46】、12【過去問 47】、13【過去問 48】、14【過去問 49】、16【過去問 50】、17【過去問 51】、18【過去問 52】、19 (サブテキ P29 上)、20【過去問 53】、21【過去問 54】、22【過去問 55】、23【過去問 56】、24<<過去問 11>>)

<<過去問 11>> 図のような荷重を受けるトラスにおいて、部材 AB に生じる軸方向力として、正しいものは次のうちどれか。ただし、引張力を「+」、圧縮力を「-」とする。(H23)



【解法】

- 1) 反力を図示
- 2) 切断面^{※3}を決定→計算対象を決定
 - ※3: 部材 3 本が最速ですが、2 本でも大丈夫ですよ…
- 3) 切断された部材に生じる応力を仮定 (図示^{※4})
 - ※4: 「必ず」計算対象側の支点・節点からベクトルを表記
- 4) 力の釣り合より部材の応力を算定^{※5}
- ※5: 任意の点のモーメントが 0、縦の合計 0、横の合計 0

切断 ⇒ 計算対象は左

反力 V_C を求める (反力算定は元の図、赤ベクトルのみに戻りますよ!)

$$M_D = +V_C \times 4L - P \times 3L - 2P \times 2L - 3P \times L = 0$$

$$V_C = \frac{10PL}{4L}$$

$$V_C = \frac{5P}{2}$$

N_{AB} を求める

$$\sum Y = +\frac{5P}{2} - P - N_{ABy} = 0$$

$$N_{ABy} = \frac{3P}{2}$$

$$N_{AB} = \frac{3\sqrt{2}P}{2}$$

『難解問題』

- ※ 節点法の方が早い場合 (H19): AB 部材の軸方向力を求めよ。
- ※ 平成 16、21 年はトラス構造の変形を用いる解法です (詳しくは演習問題解説、次ページ以降オプションにて)
- ※ 平成 22 は崩壊を謳っていますが、実はただの応力度の問題です (詳しくは演習問題解説)

(C) ひずみ：P8

- ひずみ：部材に力が加わった時の伸び縮み・太さの変形の事
- 縦ひずみ（ ε ）：荷重が加わっている方向の伸び縮み

□ $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ ε …ひずみ、 l …もとの長さ、 Δl …変形量

- 横ひずみ（ ε ）：荷重によって変化する部材の太さ

□ $\varepsilon = \frac{\Delta d}{d}$ ε …ひずみ、 d …もとの太さ、 Δd …変形量

(d) ポアソン比：P8

- ポアソン比：横ひずみを縦ひずみで除したもの

□ ポアソン比 $\frac{\Delta d / d}{\Delta l / l}$

(e) せん断ひずみ：P8

- せん断ひずみ度（ γ ）

□ $\gamma = \frac{\Delta S}{l}$ γ …せん断ひずみ度、 ΔS …せん断ひずみ（すれ）、 l …部材長さ

(f) ヤング係数：P8

- ヤング係数とは：部材に荷重が加わった場合の変形のし難さを表す、
例：コンクリートは値が大きい、ゴムは小さい

- ヤング係数（ E ）

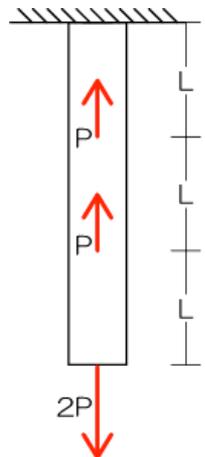
□ $E = \frac{\sigma_N}{\varepsilon}$ E …ヤング係数、 σ_N …垂直応力度、 ε …ひずみ

ひずみ

例題 4 軸方向変位（ひずみ）を求めよ。（H5）

※ ひずみ ★：ヤング係数の公式よりひずみを求めることが可能ですね

《過去問 O4》 図のような断面が一定で長さが $3L$ である棒に、軸方向力 P 、 P 、 $2P$ が矢印の向きに作用している。このとき、棒の下端の軸方向変位の値として正しいものは次のうちどれか。ただし、棒の断面積を A 、ヤング係数を E とし、自重は無視するものとする。（H5）



【解法】

- 1) 荷重を受けている点で部材を分割
- 2) 分割された各部材の垂直応力度を求める（以下公式参照）
- 3) 各部材のひずみを求め、合算（以下公式参照）

□ $\sigma_N = \frac{P}{A}$ σ_N …垂直応力度、 P …軸方向力、 A …断面積

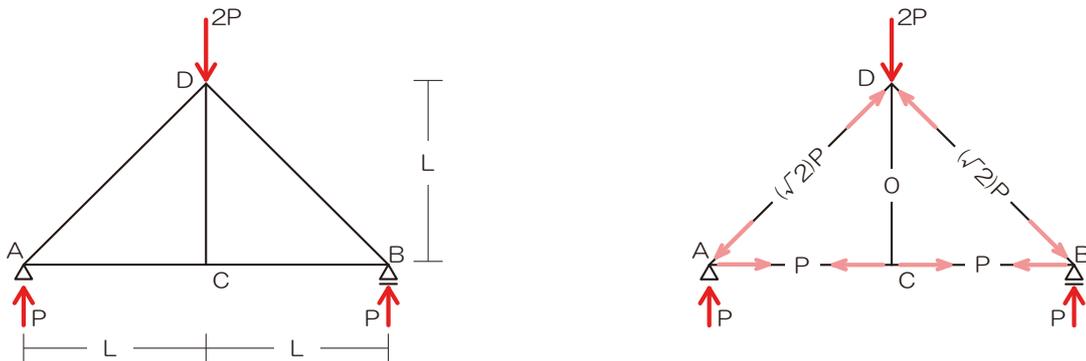
□ $E = \frac{\sigma_N}{\varepsilon}$ E …ヤング係数、 σ_N …垂直応力度、 ε …ひずみ

【オプション】 仮想仕事の原理によるトラス構造の変形の算定（平成 16、21 年）

複数の部材で構成される構造物における荷重時に生じる変位を求める際には、各々の部材の変化量のみならず、部材の位置や角度に応じた増減を加味して変化量を検討する必要があります…。したがって、本来求める変化量は、前述の各部材の変化量（ Δl ）に部材ごとの係数（ \bar{N} ）を乗じて求めることになります*1。なお、変化量の係数は変位を求める点に、変位を求める方向に荷重 1 をかけた際の各部材の軸方向力に相当します。最終的には、すべての部材の変化量を合算し*2、全体の変位とし、同解法は仮想仕事の原理と呼ばれています。以下の例題で実際に計算を行なってみよう。

$$\text{部材ごとの変化量}^{*1} \Delta l = \frac{Nl}{AE} \times \bar{N} \quad \text{すべての変化量}^{*2} \delta = \sum \Delta l = \sum \frac{Nl}{AE} \times \bar{N}$$

D 点に荷重 2P がかった場合の C 点の鉛直方向の変位を求めよ。なお、各部材の断面積は A、ヤング係数は E とする。



2) C 点に鉛直方向の荷重 1 のみを加えて、各部材の係数 \bar{N} を求めよ。 3) 各部材の材長 l も併せて示す



各部材の変化量を求め、合算し、全体の変位を求める

部材	N	\bar{N}	l	A	E	Δl
AC 材	P	1/2	L	A	E	$PL/(2AE)$
AD 材	$(\sqrt{2})P$	$(\sqrt{2})/2$	$(\sqrt{2})L$	A	E	$(\sqrt{2})PL/(AE)$
DC 材	0	1	L	A	E	0
BD 材	$(\sqrt{2})P$	$(\sqrt{2})/2$	$(\sqrt{2})L$	A	E	$(\sqrt{2})PL/(AE)$
BC 材	P	1/2	L	A	E	$PL/(2AE)$
Σ						$(1+2\sqrt{2}) PL/(AE)$

平成 16、21 年の問題はともに横架材の \bar{N} が 1 のみとなる場合だったために、余計な計算が無かったのです…。これまでに対象となる部材のが 1 以外となる問題は出題されていませんが、今後はどうなるのでしょうか…？

以上です

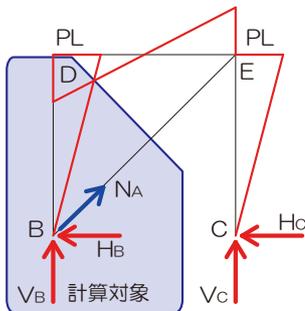
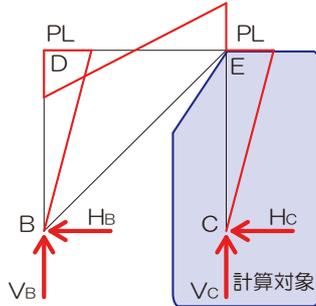
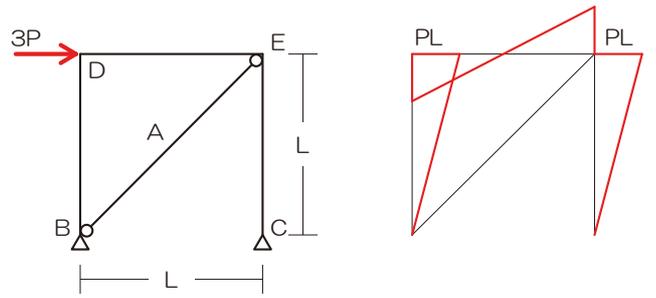
合成ラーメン

例題 12 任意の部材における応力を求めよ

《過去問 12》

『難解問題』 合成ラーメン (その 1)

右の骨組みに水平力 $3P$ が作用し、図に示すような曲げモーメントが生じて釣り合った場合、部材 A の引張力の値として正しいものはどれか。ただし、曲げモーメント図は材の引張側に描くものとする。(H24)



E 点の曲げモーメントより

$$M_E = +H_C \times L = PL$$

$$H_C = P$$

また、水平方向の力の釣り合いより

$$\sum X = 3P - H_B - H_C = 0$$

$$H_B = 3P - H_C$$

ゆえに

$$H_B = 3P - P$$

$$H_B = 2P$$

D 点の曲げモーメントより

$$M_D = +2P \times L - N_{Ax} \times L = PL$$

$$N_{Ax} = P$$

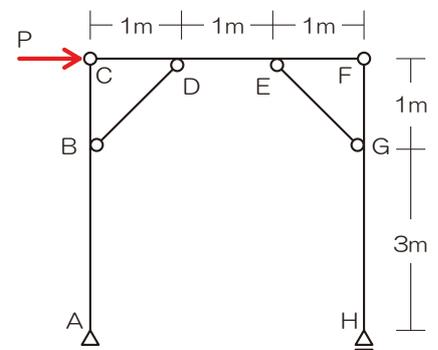
45° の直角三角形の辺の比より

$$N_A = \sqrt{2}P$$

『難解問題』 合成ラーメン (その 2)

右図のような荷重 P を受ける骨組みにおいて、各部材の軸方向力に関する次の記述のうち、誤っているものはどれか。(H15)

- 1) AB 部材には、引張力が作用している
- 2) BD 部材には、引張力が作用している
- 3) DE 部材には、軸方向力が作用していない
- 4) EG 部材には、圧縮力が作用している
- 5) GH 部材には、圧縮力が作用している



まずは、各反力の方向を求める (右図参照)

右図切断面 1] 計算対象を左下より、AB 部材には、引張力が作用している

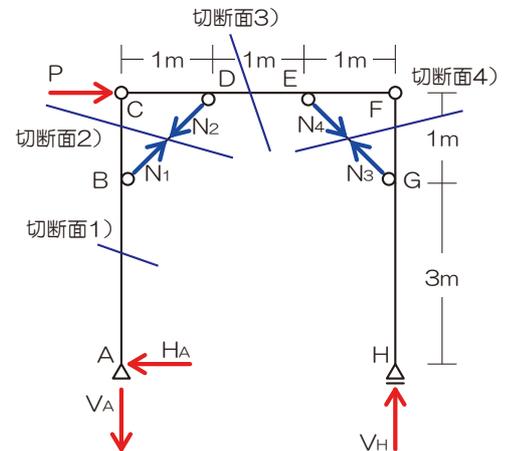
切断面 2) 計算対象を左下より、改定した応力 N_1 と水平反力 H_A との水平方向の力の釣り合いから、BD 部材には、引張力が作用している

切断面 3) 計算対象を右より、DE 部材には、軸方向力が作用していない

切断面 4) 計算対象右下より、水平反力が無いことから、 N_3 は 0、よって「EG 部材には、圧縮力が作用している」は不適

H 点の鉛直反力の方向より、GH 部材には、圧縮力が作用している

H 点の鉛直反力の方向より、GH 部材には、圧縮力が作用している



1.2.5 不静定構造物と変形：P39

(A) はりの変形

➤ 部材の変形

□ 部材のたわみ・たわみ角 ⇒ たわみとは：構造材に荷重がかかった際に生じるわん曲（たわみとたわみ角がある）

• たわみ： $\delta_{\max} = \alpha \frac{Pl^3}{EI}$ （集中荷重）、 $\delta_{\max} = \alpha \frac{wl^4}{EI}$ （分布荷重）

• たわみ角： $\theta_A = \beta \frac{Pl^2}{EI}$ （集中荷重）、 $\theta_A = \beta \frac{wl^3}{EI}$ （分布荷重）

➤ たわみの問題

1) 公式直接代入・公式変形型：平成 11、15、17、21（P49 No.9）、22（P48 No.8）、23（P61 No.24）

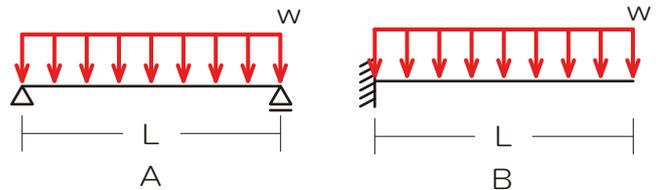
たわみ（たわみと傾き合成）

例題 13-01 たわみ、たわみ角を求めよ（H9【過去問 60】、10【過去問 61】、11【過去問 62】、16【過去問 65】、17【過去問 66】、21【過去問 67】、23◀過去問 13-01▶）

◀過去問 13-01▶図のような梁 A および B に等分布荷重 w が作用したときの曲げによる最大たわみ δ_A と δ_B の比として正しいものは次のうちどれか。ただし、梁 A および B は等質等断面とする（H23）

【解法】

1) たわみの公式より最大たわみを求める



梁 A のたわみを求める

$$\delta_A = \frac{5wL^4}{384EI}$$

梁 B のたわみを求める

$$\delta_B = \frac{wL^4}{8EI}$$

両者のたわみの比は

$$\delta_A : \delta_B = \frac{5wL^4}{384EI} : \frac{wL^4}{8EI}$$

$$\delta_A : \delta_B = \frac{5}{48} : \frac{1}{1}$$

$$\delta_A : \delta_B = 5 : 48$$

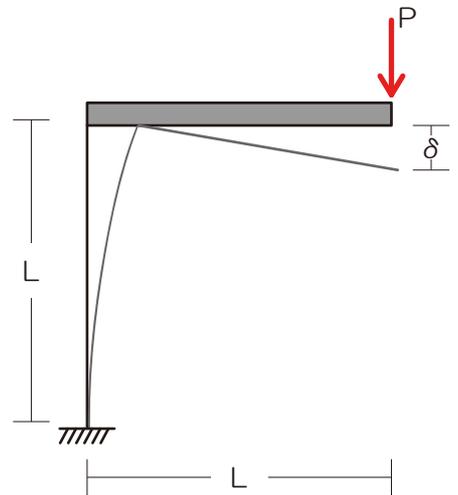
たわみ（たわみと傾き合成）

例題 13-02 たわみ、たわみ角を求めよ（H4【過去問 59】、13【過去問 63】、14【過去問 64】、18《過去問 13-02》、22【過去問 68】）

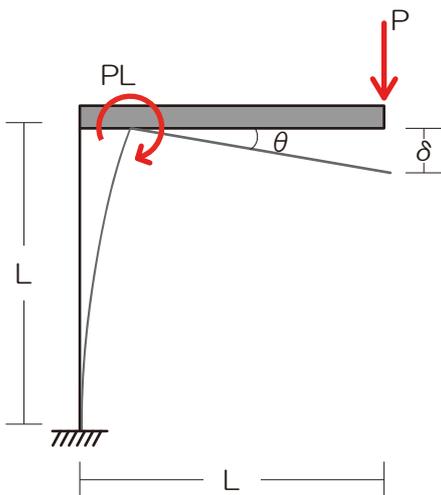
《過去問 13-02》図のような荷重 P を受けるラーメンにおいて、荷重 P によって生じる材端の鉛直方向の変位として、正しいものは次のうちどれか。ただし、梁は剛体とし、柱のヤング係数を E、断面 2 次モーメントを I とし、部材の軸方向の変形は無視するものとする。（H18）

【解法】

- 1) たわむ材料に作用する荷重を求める
- 2) 荷重の作用している点で部材を分割
- 3) 分割した部材のそれぞれのたわみを合計し、全体のたわみを求める
- 4) 部材の傾きによる沈み込みには微小タンジェントの法則



梁先端の荷重 P によって生じるモーメントが、柱頂部にかかり柱に変形が生じる ⇒ その変形に起因する傾きにより梁が下方に変形



梁の傾きを求める

（片持ち梁先端にモーメントがかかる場合のたわみ角の公式より）

$$\theta = \frac{Ml}{EI}$$

$$\theta = \frac{PL \times L}{EI}$$

梁の変形は（微小タンジェントの法則より）

$$\delta = \theta \times L$$

$$\delta = \frac{PL \times L}{EI} \times L$$

$$\delta = \frac{PL^3}{EI}$$